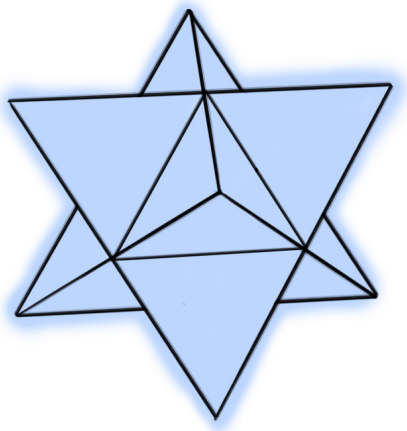
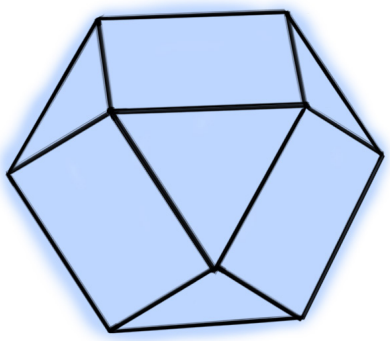
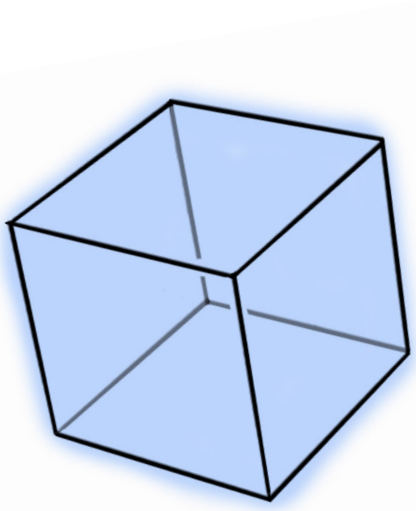
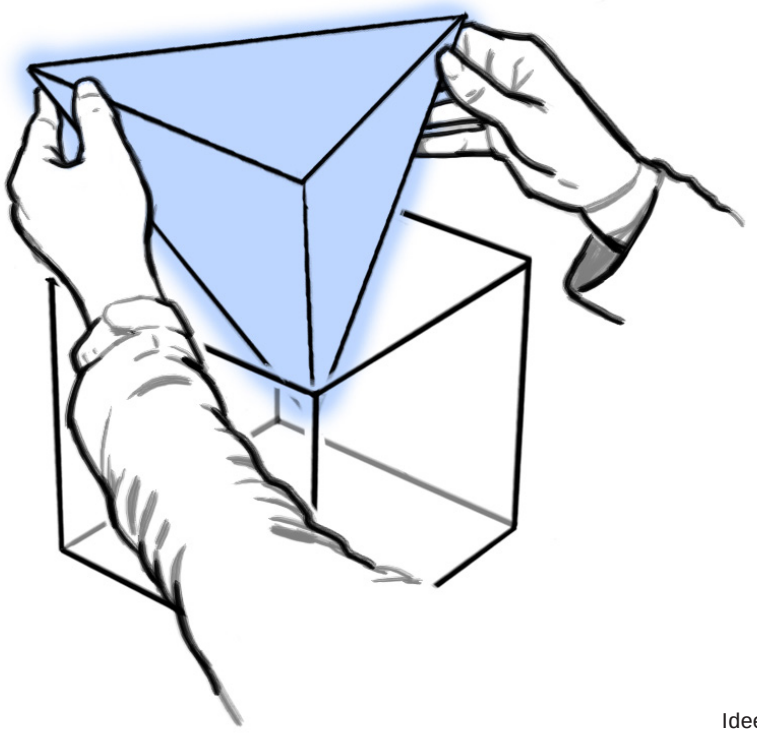
# Was alles in den Würfel passt

**Manche Objekte wirken grösser als sie es in Wirklichkeit sind. Eine Herausforderung für das räumliche Vorstellungsvermögen - aber es geht wirklich!**









## Was tun und beachten:

- *Diese Körper sollen in den Glaswürfel passen?*
- *Unglaublich? Versuchen Sie‘s!*

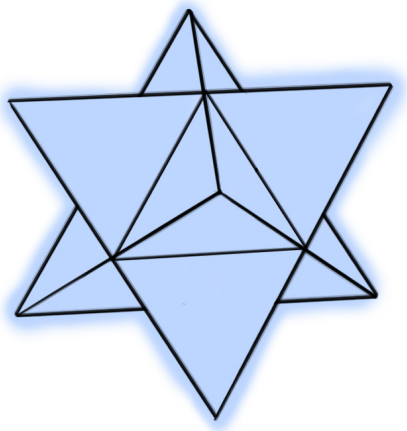
## Wer mehr wissen möchte:

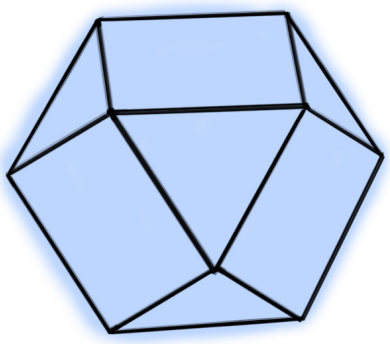
**lesen Sie den Zusatztext**

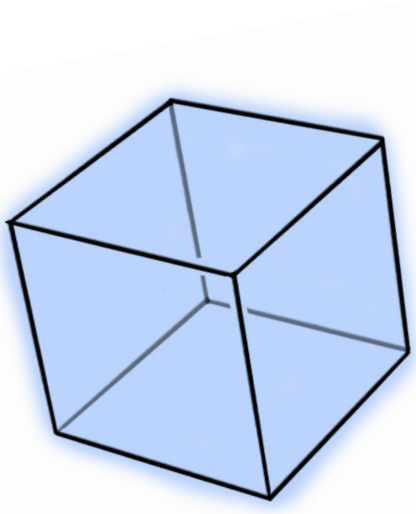
Idee und Konzept: Mathematikum Giessen / Ausführung: Technorama
“Was alles in den Würfel passt_DEFI.indd”; Nr. 10487

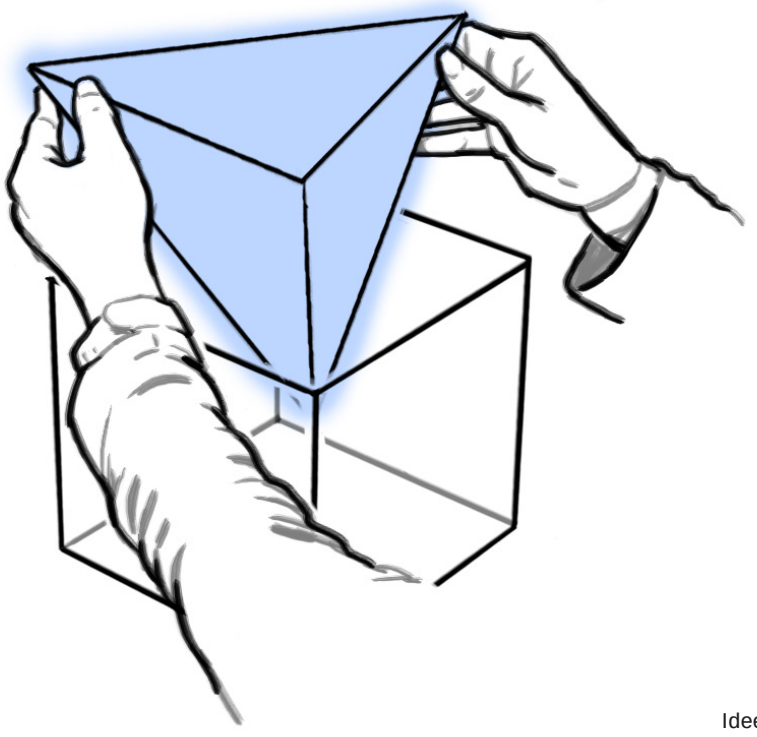
# Was alles in den Würfel passt

**Manche Objekte wirken grösser als sie es in Wirklichkeit sind. Eine Herausforderung für das räumliche Vorstellungsvermögen - aber es geht wirklich!**









## Was tun und beachten:

- *Diese Körper sollen in den Glaswürfel passen?*
- *Unglaublich? Versuchen Sie‘s!*

## Wer mehr wissen möchte:

Idee und Konzept: Mathematikum Giessen / Ausführung: Technorama
“Was alles in den Würfel passt_DEFI.indd”; Nr. 10487

# Was alles in den Würfel passt

## Wer mehr wissen möchte

Vier Körper, ein Würfel, ein Tetraeder (Pyramide), ein Doppeltetraeder (Zackenstern) und ein Körper, der aus Dreiecken und Quadraten zusammengesetzt ist (Kuboktaeder genannt)sollen in den Glaswürfel passen! Den Würfel bringt man leicht hinein – fast schon banal. Aber die anderen Objekte sehen irgendwie zu gross aus.

Das Schöne an diesem Experiment ist: Es ist altersunabhängig; achtjährige Schülerinnen und Schüler haben die gleiche Chance wie Mathematikprofessoren: manche können‘s und manche können‘s eben nicht. Selbst wenn man die Lösung einmal gesehen hat, kann man sie nicht unbedingt wiederholen. Man braucht eine gute Raumvorstellung, um das Ergebnis vorherzusehen. Man kann aber auch systematisch vorgehen: Das Tetraeder passt nicht mit der Ecke nach unten, auch nicht mit einer Fläche nach unten, also... versuchen wir es mit einer Kante nach unten!

Schon beim Ausprobieren mit Würfel und Tetraeder tauchen Fragen zu Ecken, Kanten und Flächen der Körper auf: Wie viele Seiten hat ein Würfel? – Natürlich sechs. Wie viele Kanten hat ein Tetraeder? Zur Spitze hin drei und unten drei, also auch sechs. Ist es Zufall, dass sich jedes Mal die gleiche Zahl ergibt? – Nein, denn man sieht, dass jede Kante des Tetraeders von einer Fläche des Würfels bedeckt wird.

Auf wie viele verschiedene Arten kann man den Tetraeder in den Würfel einpassen? Die unterste Kante ist eine Diagonale des Quadrats. Da ein Quadrat zwei Diagonalen hat, gibt es auch zwei Möglichkeiten, den Tetraeder mit dieser Kante zuerst in den Würfel einzupassen. Wenn wir versuchen, uns diese beiden Tetraeder gleichzeitig im Würfel vorzustellen, bilden sie den „Doppeltetraeder“. Dieser wird als „stella octangula“, ein achtzackiger Stern, der von Johannes Keppler (1571 – 1630) entdeckt wurde, bezeichnet. Bei unterschiedlich gefärbten Kanten des Tetraeders kann man noch feiner unterscheiden, wie der Tetraeder in den Würfel eingefügt werden kann. Jede der sechs Kanten kann die unterste sein. Das bedeutet, dass es 2 x 6 = 12 Möglichkeiten gibt, den Tetraeder in den Würfel einzupassen.

Dieses Experiment eignet sich sogar zum Rechnen: Welchen Teil des Würfelvolumens nimmt der eingepasste Tetraeder ein? Diese Frage beantwortet man am besten, indem man nicht den Rauminhalt des Tetraeders ausrechnet, sondern den der vier restlichen „Ecken“.
Jede dieser Ecken ist eine Pyramide. Die Grundseite der Pyramide ist die halbe Quadratfläche (also ½ $a^2$, wenn der Würfel die Kantenlänge a hat), die Höhe ist a. Die Formel zur Berechnung des Rauminhalts einer Pyramide ergibt jetzt 1/3 x $a^2$ / 2 x a = $a^3$ / 6. Da es vier solcher Pyramiden gibt, ist deren Gesamtrauminhalt 4 x $a^3$ / 6 = 2/3 $a^3$, und für den Tetraeder bleiben gerade noch 1/3 $a^3$. Also nimmt der Tetraeder genau ein Drittel des gesamten Rauminhalts ein.

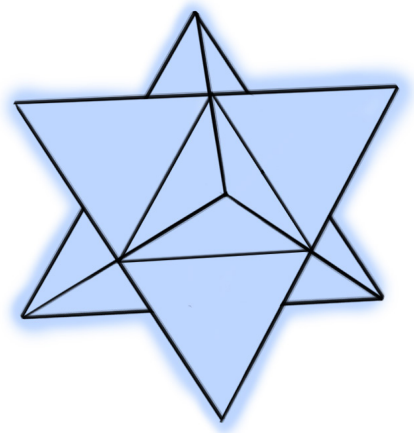
**Was tun und beachten:**

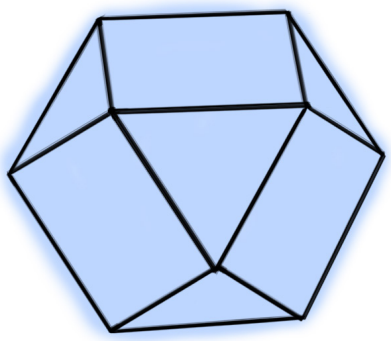
Idee und Konzept: Mathematikum Giessen / Ausführung: Technorama
“Was alles in den Würfel passt_DEFI.indd”; Nr. 10487

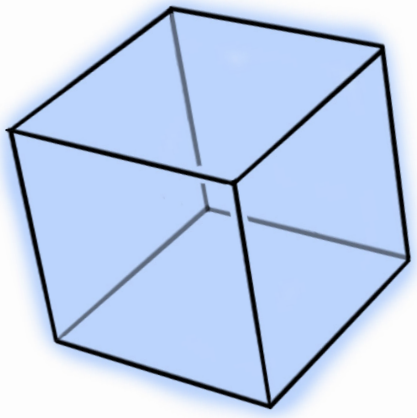
# Do they fit in the Box?

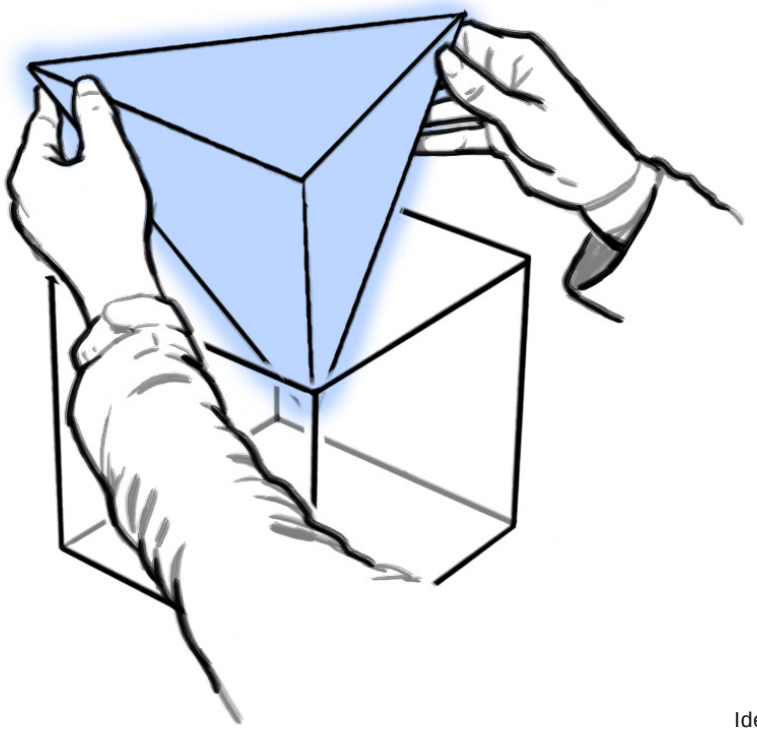
**Some objects look bigger than they really are.**

**Here you can exercise your spatial ability – they really do fit!**









**To do and notice:**

- *These solids will fit into the glass box?*
- *Unbelievable? Give it a try!*

**Want to know more?**

Idea and Concept: Mathematikum Giessen / Realisation: Technorama
“Was alles in den Würfel passt_DEFI.indd”; Nr. 10487

# Do they fit in the Box?

## Want to know more?

These four solids: a cube, a tetrahedron (pyramid), a double-tetrahedron (the spiky star-shape) and the cubeoctahedron (faces are eight triangles and six squares) will all fit into the glass cube box! The cube is rather obvious, but the others all look too big.

It is interesting that this problem poses as much difficulty to all ages – eight-year-old boys and girls seem to have the same chance of fitting them in as do professors of mathematics – some can and some can't do it! Even when you've seen it done, there's no guarantee you can repeat it. Good spatial visualisation is very useful – an ability to imagine the solution before you try it.

You can, of course, approach it systematically. The tetrahedron doesn't fit with a corner downwards (nor upwards), neither with a triangular face downwards, so …. Try it with an edge downwards!

Initial attempts with the cube and tetrahedron (the easiest) draw your attention to numbers of corners, edges and sides. How many sides has a cube? Obviously six.

How many edges has the tetrahedron – again it's six. That strongly suggests that each edge of a tetrahedron could be on the face of a cube. So how many ways could the tetrahedron fit into the cubical box? An edge of the tetrahedron becomes a diagonal of the bottom face of the box, when you fit it in. There are two diagonals at the bottom, so that gives two possibilities. Since the tetrahedron has six edges, each of these could be positioned onto a diagonal of the bottom of the box, so there are 2 x 6 = 12 different orientations of the tetrahedron in the box.

If we now consider the "double tetrahedron" – the spiky star-shaped solid discovered by Johannes Kepler (1571 – 1630) – each of its component tetrahedra must satisfy the "edge fits diagonal at the bottom" rule.

The fact that the cubeoctahedron has six square faces is useful – it can be thought of as a cube with its eight corners chamfered off!

The exhibit is also an aid to calculating. What fraction of the cubical box is occupied by the tetrahedron.

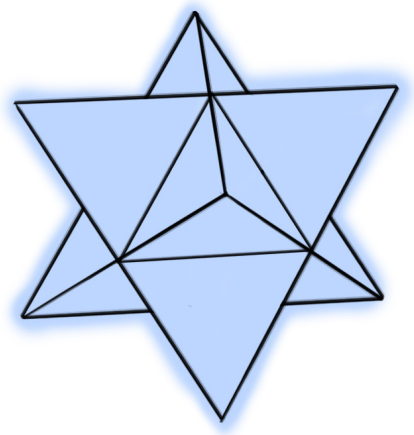
Think rather of the space left unoccupied – four pyramid shapes. The base of each pyramid is half of a face of the cube and its height is the edge of the cube. If the cube side has length "a", each pyramid has base area ½ $a^2$, and height a. The volume of a pyramid is 1/3 of the height times the base area, so is 1/3 x 1/2 x $a^2$ x a = 1/6 x $a^3$. Since there are four of these "empty" pyramid spaces, the total unoccupied space is 4/6 x $a^3$ = 2/3 x $a^3$, so the tetrahedron itself has the remaining space, 1/3 x $a^3$, which is 1/3 of the cube's volume.

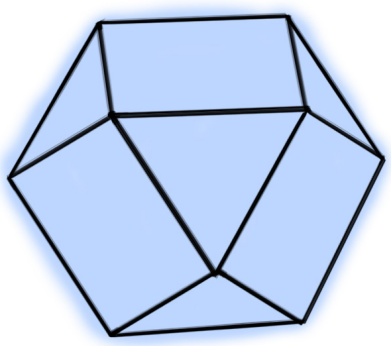
## To do and notice:

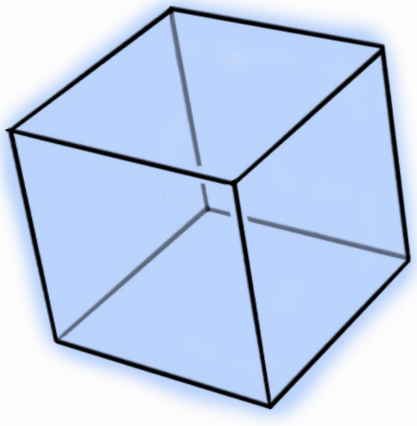
Idea and Concept: Mathematikum Giessen / Realisation: Technorama
"Was alles in den Würfel passt_DEFI.indd"; Nr. 10487

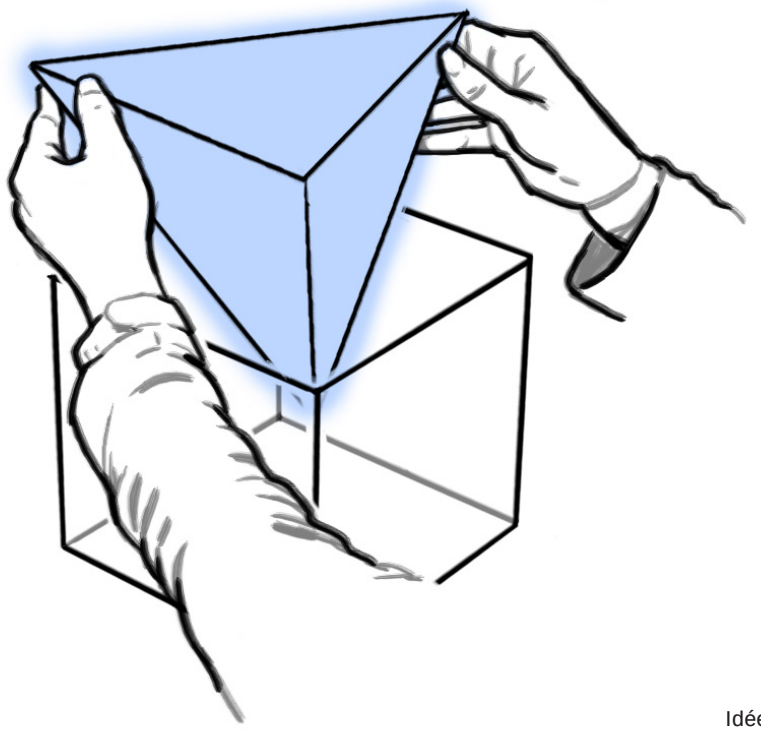
# Tout ce qui rentre dans un cube

**Certains objets paraissent plus grands qu'ils ne sont en réalité. C'est un défi pour l'imagination tridimensionnelle – mais c'est vraiment possible!**









## A vous de jouer:

- *Ces corps doivent rentrer dans le cube en verre!*
- *Incroyable? Essayez-le!*

**Pour en savoir plus:**

Idée et conception: Mathematikum Giessen / Réalisation: Technorama
"Was alles in den Würfel passt_DEFI.indd"; Nr. 10487

# Tout ce qui rentre dans un cube

## Pour en savoir plus

Quatre corps, un cube, un tétraèdre (pyramide), un double tétraèdre (étoile) et un corps composé de triangles et de carrés (un cuboctaèdre) doivent renter dans ce cube en verre! Le cube rentre facilement – c'est presque banal. Mais les autres objets paraissent trop grands.

La beauté de cette expérience: elle convient à tous les âges, des élèves de huit ans ont la même chance de trouver la solution que des professeurs de mathématiques: certains en sont capables, d'autres non. Même si l'on a vu la solution une fois, il n'est pas évident de pouvoir la répéter. Il faut avoir une bonne imagination en trois dimensions afin d'imaginer la solution auparavant. On peut aussi procéder de manière systématique. Le tétraèdre ne rentre pas avec le sommet pointant vers le bas, pas non plus avec l'une des surfaces vers le bas, alors… essayons-le avec un bord vers le bas!

Rien qu'en manipulant les cubes et les tétraèdres, on se pose des questions sur les sommets, les bords et les surfaces des corps: combien de bords a un cube? – Six évidemment. Combien de bords a un tétraèdre? Trois vers les sommets et trois sur la base en bas, donc six aussi? Est-ce un hasard que vous retrouvez à chaque fois le même nombre? – Non, car on voit que chaque bord du tétraèdre est couvert par une surface du cube.

Combien de manières différentes y a-t-il pour faire rentrer le tétraèdre dans le cube? Le bord le plus bas est une diagonale du carré. Comme un carré possède deux diagonales, il y a aussi deux possibilités pour faire rentrer le tétraèdre dans le cube avec ce bord d'abord. Quand nous essayons d'imaginer ces deux tétraèdres en même temps à l'intérieur du cube, ils constituent le «tétraèdre double» appelé aussi «stella octangula», une étoile à huit pointes, découvert par Johannes Keppler (1571-1630). Quand les bords du tétraèdre sont colorés différemment, on peut plus facilement distinguer les différentes possibilités pour introduire le tétraèdre dans le cube. Chacun des six bords peut être le bord le plus bas. Cela signifie qu'il y a $2 \times 6 = 12$ possibilités pour faire entrer le tétraèdre dans le cube.

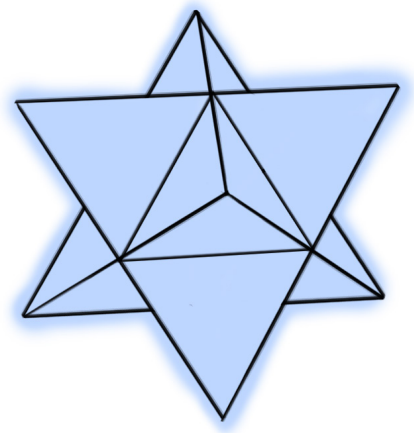
Cette expérience se prête même à des calculs: quelle proportion du volume du cube est remplie par le tétraèdre introduit? On peut répondre à cette question le plus facilement sans calculer le volume du tétraèdre, mais en calculant le volume des quatre «coins». Chacun des coins est une pyramide. La base d'une pyramide est la moitié de la surface d'un carré (donc $\frac{1}{2}\ a^2$, quand le cube a la longueur de bord a), la hauteur est a. La formule pour calculer le volume d'une pyramide est donc $1/3 \times a^2 / 2 \times a = a^3 / 6$. Comme il y a quatre pyramides comme ça, le volume total est $4 \times a^3 / 6 = 2/3\ a^3$, et donc pour le tétraèdre il ne reste que $1/3\ a^3$. Donc le tétraèdre occupe exactement un tiers du volume total.

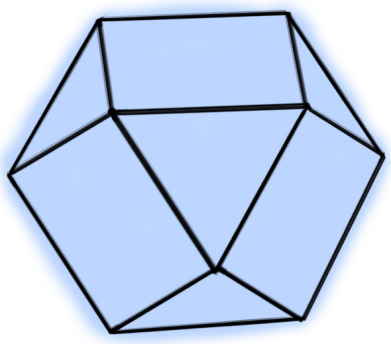
**A vous de jouer:**

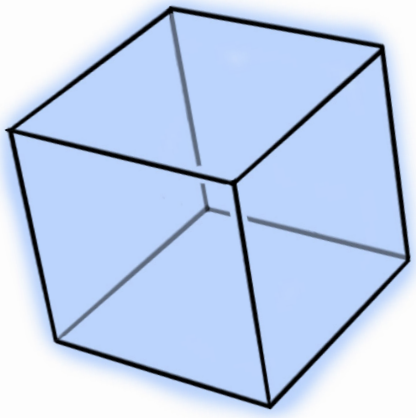
Idée et conception: Mathematikum Giessen / Réalisation: Technorama
"Was alles in den Würfel passt_DEFI.indd"; Nr. 10487

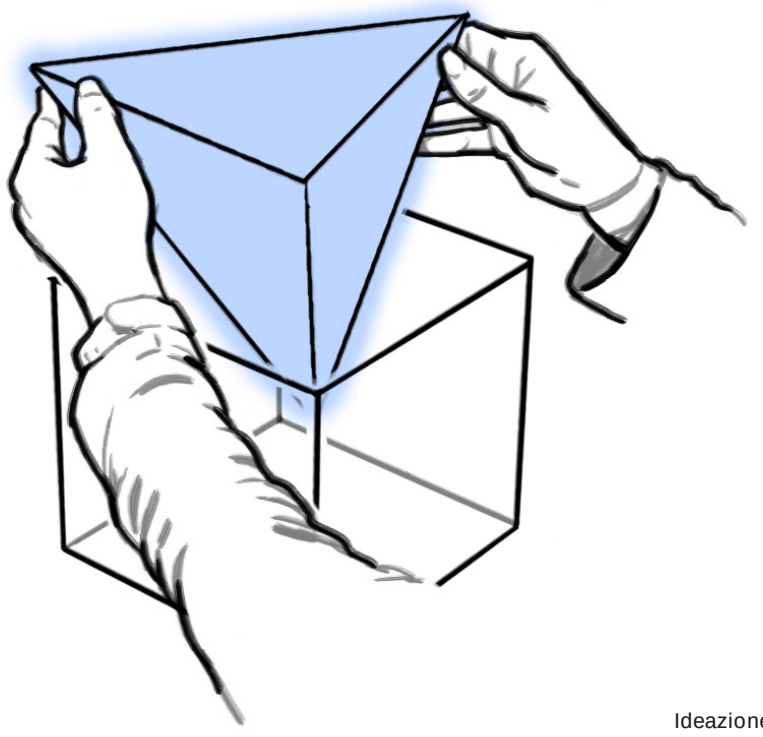
# Che cosa sta in un cubo?

**Alcuni oggetti sembrano più grandi di quanto siano realmente. Una sfida per l‘immaginazione spaziale: incredibile ma c‘entra!**









## Che cosa fare:

- *Questi solidi dovrebbero entrare nel cubo di vetro.*
- *Impossibile? Provare per credere!*

**Vuole saperne di più?**

Ideazione e progetto: Mathematikum Giessen / Realizzazione: Technorama
“Was alles in den Würfel passt_DEFI.indd”; Nr. 10487

# Che cosa sta in un cubo?

## Vuole saperne di più?

Quattro solidi - un cubo, un tetraedro (piramide), un doppio tetraedro (stella) e un solido composto da triangoli e quadrati (chiamato cubottaedro) dovrebbero riuscire a entrare nel cubo di vetro! Per quanto riguarda il cubo, il compito è facile, quasi banale; ma per altri oggetti sembrano troppo grandi.

Il bello di questo esperimento è questo: non dipende dall'età. Scolari e scolare di otto anni hanno le stesse probabilità di farcela dei professori di matematica: alcuni ci riescono e altri proprio non ce la fanno. Perfino dopo aver visto la soluzione, non è detto che si riesca a ripeterla. Occorre un buon senso di immaginazione spaziale per prevedere il risultato. Ma si può anche procedere in maniera sistematica. Il tetraedro non entra con un vertice verso il basso, neanche con una superficie verso il basso... allora proviamo con uno spigolo verso il basso!

Già quando si sperimenta con il dado e il tetraedro entrano in gioco delle domande riguardo a vertici, spigoli e facce dei solidi: quante facce ha un cubo? Naturalmente sei. Quanti spigoli ha un tetraedro? Tre per un vertice e tre per un altro vertice, dunque sei. Possibile che sia un caso che il numero è sempre quello? No, perché si vede che ogni spigolo del tetraedro viene coperto da una faccia del cubo.

In quanti modi diversi si può inserire il tetraedro nel cubo? Lo spigolo inferiore è una diagonale del quadrato. Dato che un quadrato ha due diagonali, esistono anche due possibilità di inserire il tetraedro con questi spigolo nel cubo. Se proviamo a immaginare questi due tetraedri nel cubo, essi formeranno un doppio tetraedro. Questo viene chiamato appunto stella octangula, una stella con otto punte, immaginata per la prima volta da Johannes Kepler (1571-1630). Nel caso di spigoli del tetraedro di colore diverso si può distinguere ancora più accuratamente come debba essere inserito il tetraedro nel cubo. Ciascuno dei sei spigoli può essere quello più basso. Questo significa che esistono 2 x 6 = 12 possibilità di inserire il tetraedro nel cubo.

Questo esperimento si presta addirittura al calcolo: quale parte del volume del cubo viene occupata dal tetraedro che è stato inserito? Si può rispondere a questo interrogativo calcolando non lo spazio occupato dal tetraedro, bensì lo spazio dei quattro "angoli" rimanenti. Ciascuno di questi angoli è una piramide. La base della piramide è la metà di un quadrato (dunque ½ $a^2$ se il cubo ha spigolo di lunghezza a), mentre l'altezza è a. La formula per calcolare il volume di una piramide è 1/3 x $a^2$ / 2 x a = $a^3$ / 6. Dato che ci sono quattro piramidi del genere, il loro volume complessivo è 4 x $a^3$ / 6 = 2/3 $a^3$, mentre per il tetraedro rimane appunto un volume pari a 1/3 $a^3$. Dunque il tetraedro occupa esattamente un terzo del volume totale.

Che cosa fare:

Ideazione e progetto: Mathematikum Giessen / Realizzazione: Technorama
"Was alles in den Würfel passt_DEFI.indd"; Nr. 10487