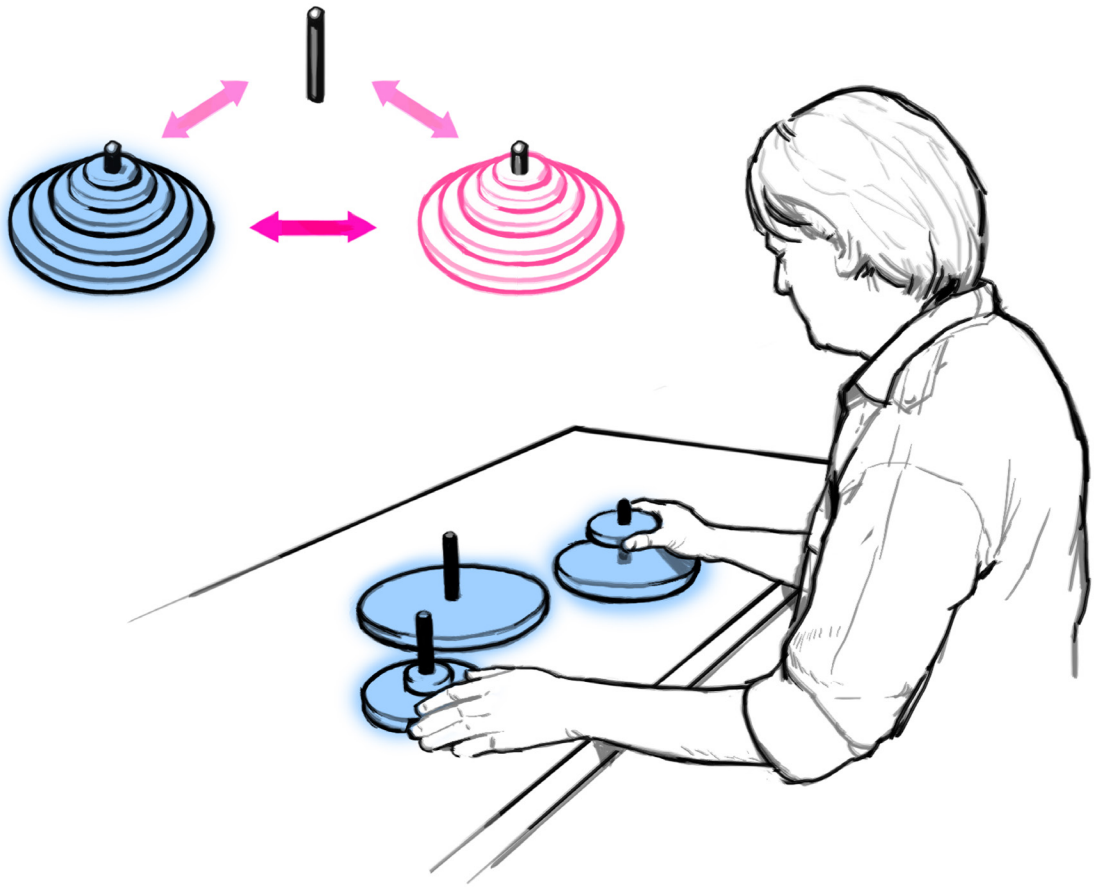
# Turm von Hanoi

**Versuchen Sie alle Scheiben von einem Stift auf einen anderen Stift zu setzen.**

**Wie viele Züge brauchen Sie?**



## Was tun und beachten:

*Für dieses Spiel gelten nur folgende Regeln:*

- *Alle Scheiben gehören zu Beginn (der Grösse nach geordnet, die Grösste nach unten) auf einen der drei Stäbe.*
- *Es darf immer nur eine Scheibe zur Zeit (pro Zug) bewegt werden.*
- *Es darf nie eine grössere über einer kleineren Scheibe liegen.*
- **Tipp:** *Versuchen Sie es doch zuerst einmal mit zwei und danach mit drei Scheiben.*

## Wer mehr wissen möchte:

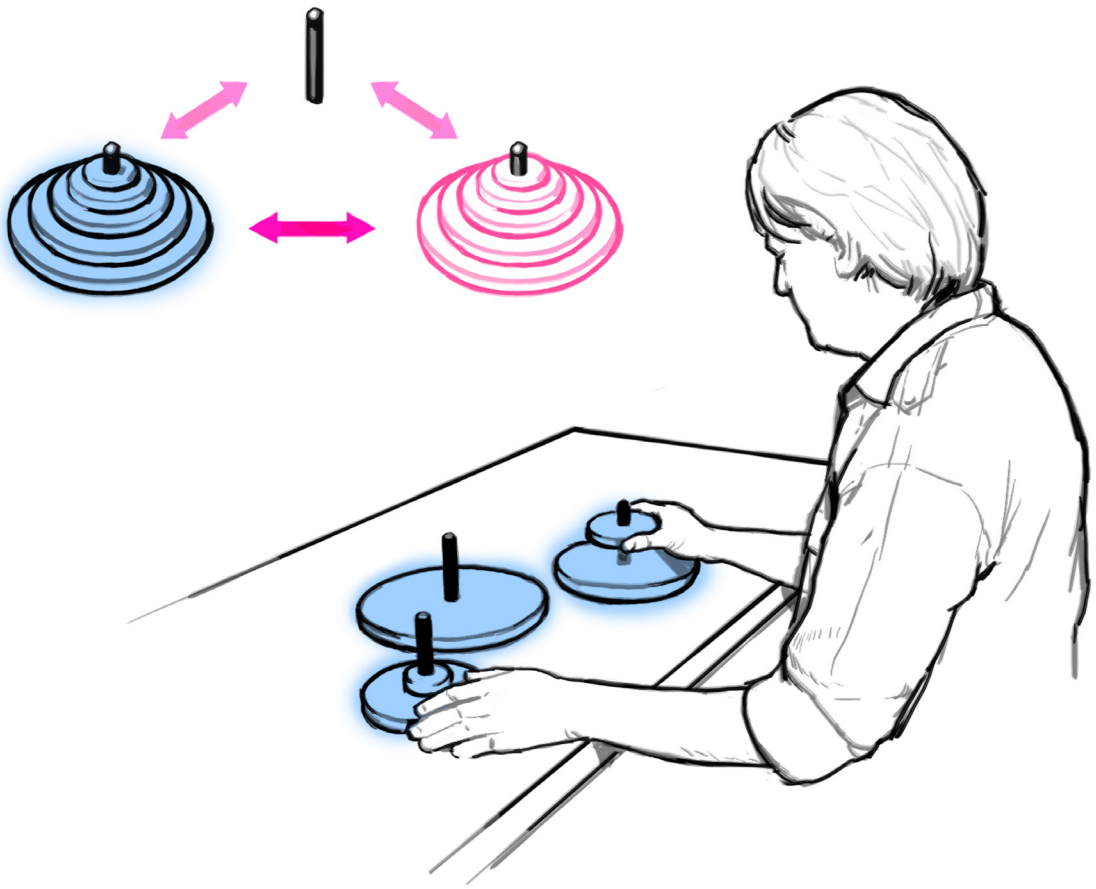
**lesen Sie den Zusatztext**

Idee und Konzept: Technorama
“Turm von Hanoi_defiZ.indd”; Nr. 10451

# Turm von Hanoi

**Versuchen Sie alle Scheiben von einem Stift auf einen anderen Stift zu setzen.**

**Wie viele Züge brauchen Sie?**



## Was tun und beachten:

*Für dieses Spiel gelten nur folgende Regeln:*

- *Alle Scheiben gehören zu Beginn (der Grösse nach geordnet, die Grösste nach unten) auf einen der drei Stäbe.*
- *Es darf immer nur eine Scheibe zur Zeit (pro Zug) bewegt werden.*
- *Es darf nie eine grössere über einer kleineren Scheibe liegen.*
- **Tipp:** *Versuchen Sie es doch zuerst einmal mit zwei und danach mit drei Scheiben.*

**Wer mehr wissen möchte:**

Idee und Konzept: Technorama
“Turm von Hanoi_defiZ.indd”; Nr. 10451

# Turm von Hanoi

## Wer mehr wissen möchte

Wie viele Züge braucht man für das Umschichten? Versucht man es zuerst mit nur ein, zwei, drei Scheiben, zeigt sich schnell ein Zusammenhang:

| Anzahl Scheiben | Anzahl Züge |
|---|---|
| 1 | **1** = 2-1 = $2^1$-1 |
| 2 | **3** = 2x2-1 = $2^2$-1 |
| 3 | **7** = 2x2x2-1 = $2^3$-1 |
| 4 | **15** = 2x2x2x2-1 = $2^4$-1 |
| 5 | **31** = 2x2x2x2x2-1 = $2^5$-1 |
| 6 | **63** = 2x2x2x2x2x2-1 = $2^6$-1 |
| n | **...** = 2x2x2x … x2x2-1 = $2^n$-1 |

Man kann mittels vollständiger Induktion mathematisch beweisen, dass das Problem des Turms von Hanoi lösbar ist. Der Beweis zeigt, dass man in $2^n$ -1 Schritten n Scheiben von einem Stab auf einen anderen versetzen kann.

### Lösungsmöglichkeiten

Peter Buneman (Universität Pennsylvania) und Leon Levy (von AT&T Laboratories) haben 1984 eine einfache Zugfolge gefunden, mit der man einfach ans Ziel kommt. Man muss nur folgende Schritte abwechselnd ausführen:

1. **Lege die kleinste versetzbare Scheibe auf den im Uhrzeigersinn nächsten Stab.**
2. **Versetze die zweitkleinste verschiebbare Scheibe auf den einzig möglichen Stab.**

Diese Lösungsstrategie ist sehr effizient – mit einer fast unglaublich kleinen Zahl an Anweisungen! Die Grundidee zu dieser Lösung besteht darin, sich die Stäbe als im Kreis angeordnet vorzustellen.

Diese folgende Geschichte veröffentlichte der französische Mathematiker Edouard Lucas (1842 – 1891) anlässlich der Weltausstellung 1889 in Paris. Lucas ist somit Erfinder des «Turms von Hanoi» (manchmal auch «Turm des Brahma» oder «Puzzle vom Ende der Welt» genannt).

«Im grossen Tempel zu Benares, der den Mittelpunkt der Welt bezeichnet, stehen drei diamantene Säulen. Auf eine davon hat der Herr zu Beginn der Zeiten 64 goldene Scheiben gesteckt, welche von unten nach oben einen kleiner werdenden Durchmesser haben; dieser Turm ist dem Brahma geweiht. Tag und Nacht sind die Tempelpriester damit beschäftigt, den Turm nach folgenden Regeln umzubauen:

Die Scheiben dürfen nur einzeln umgesetzt, eine Scheibe darf nie auf eine kleinere Scheibe gelegt, und zum Umbau des Turms dürfen alle drei Säulen benutzt werden. Wenn das Werk vollendet, d.h. der Turm von der ersten auf die zweite Säule umgesetzt ist, zerfallen Turm und Priester zu Staub, und das Ende der Welt ist gekommen.»

Selbst im günstigsten Fall müssten die Priester zu Benares $2^{64}$-1 Züge ausführen, um den Turm gemäss der Regeln zu versetzen. Auch wenn die Priester für das Bewegen einer einzelnen Scheibe nur eine Sekunde benötigen, dauert das Versetzen des gesamten Turms fast 585 Milliarden Jahre. Geht man davon aus, dass die Entstehung der Welt durch den Urknall vor weniger als 14 Milliarden Jahren stattfand, so müssen wir uns um ein baldiges Ende der Welt keine allzu grossen Sorgen machen.

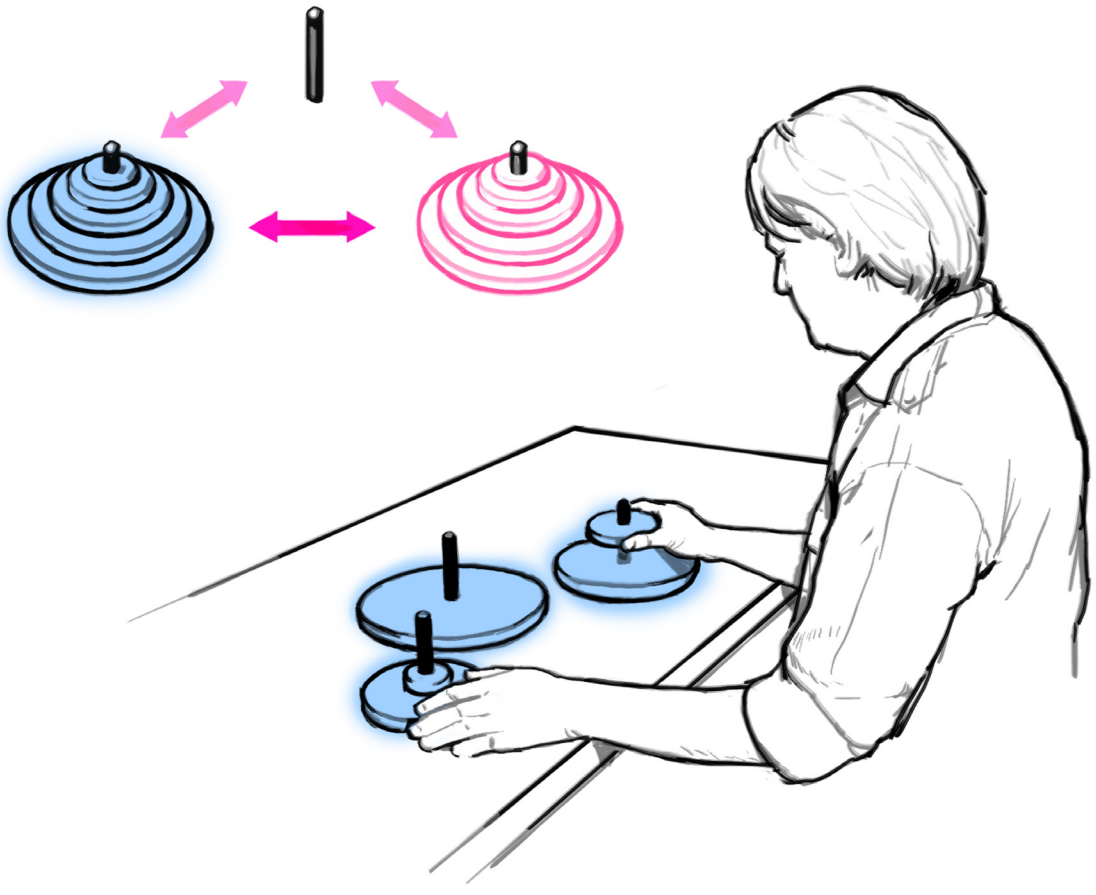
**Was tun und beachten:**

Idee und Konzept: Technorama
“Turm von Hanoi_defiZ.indd”; Nr. 10451

# Towers of Hanoi

**Try to move all of the discs from one peg to another.**

**How many moves does it take?**



## To do and notice:

*For this game, you must follow these rules:*

- *Start with all of the discs on one peg, largest disc first and so on up to the smallest on top.*
- *Move only one disc at a time, to another peg.*
- *You can only put a smaller disc on a larger one.*
- *You finish with all of the discs on another peg*
- **Tip:** *Start by using only two discs to get the idea, then move to three, etc.*

**Want to know more?**

Idea and Concept: Technorama
“Turm von Hanoi_defiZ.indd”; Nr. 10451

# Towers of Hanoi

## Want to know more?

How many moves are needed to entirely move the tower? Starting with two discs (one would be trivial) and working up, you will soon see the way the moves build up.

| Number of Discs | Number of Moves |
|---|---|
| 1 | **1** = 2-1 = $2^1$-1 |
| 2 | **3** = 2x2-1 = $2^2$-1 |
| 3 | **7** = 2x2x2-1 = $2^3$-1 |
| 4 | **15** = 2x2x2x2-1 = $2^4$-1 |
| 5 | **31** = 2x2x2x2x2-1 = $2^5$-1 |
| 6 | **63** = 2x2x2x2x2x2-1 = $2^6$-1 |
| n | **...** = 2x2x2x … x2x2-1 = $2^n$-1 |

The table shows that adding another disc doubles the number of moves in the previous case, plus one. In other words, you have to repeat the previous case after having transferred the very bottom disc (which is the “plus one”). The puzzle is well known to students of computer science, where it is often used to introduce ideas of data structures, recurrence relations, etc.

If you lose track of where you are in the game, the rule first published by Peter Buneman (Univ. of Pennsylvania) and Leon Levy (AT&T Labs) in 1984 will help:

1. **Put the smallest moveable disc onto the next peg in a clockwise direction.**
2. **Transfer the second-smallest moveable disc to the only possible peg.**

This rule is very efficient, despite its incredibly limited number of rules! The basic idea you need is to think of the three pegs arranged in a circle.

The French mathematician, Edouard Lucas (1842 – 1891), published the following story on the occasion of the Paris World Exhibition in 1889. Lucas had in fact invented the puzzle, Towers of Hanoi, in 1883, and probably originated various legends about its history! Other names for the puzzle are: «Towers of Brahma», and «Puzzle of the end of the world».

«In the great temple at Benares, designated as the middle of the world, stand three diamantine pillars. At the beginning of time, the Lord Brahma stacked on one pillar 64 golden discs, each one a little smaller than the one below. Day and night, the priests of Brahma’s temple are to transfer the discs according to the rules (of Lucas’ game). When the task is completed, the towers (and the priests) will crumble to dust and the end of the world will have come.»

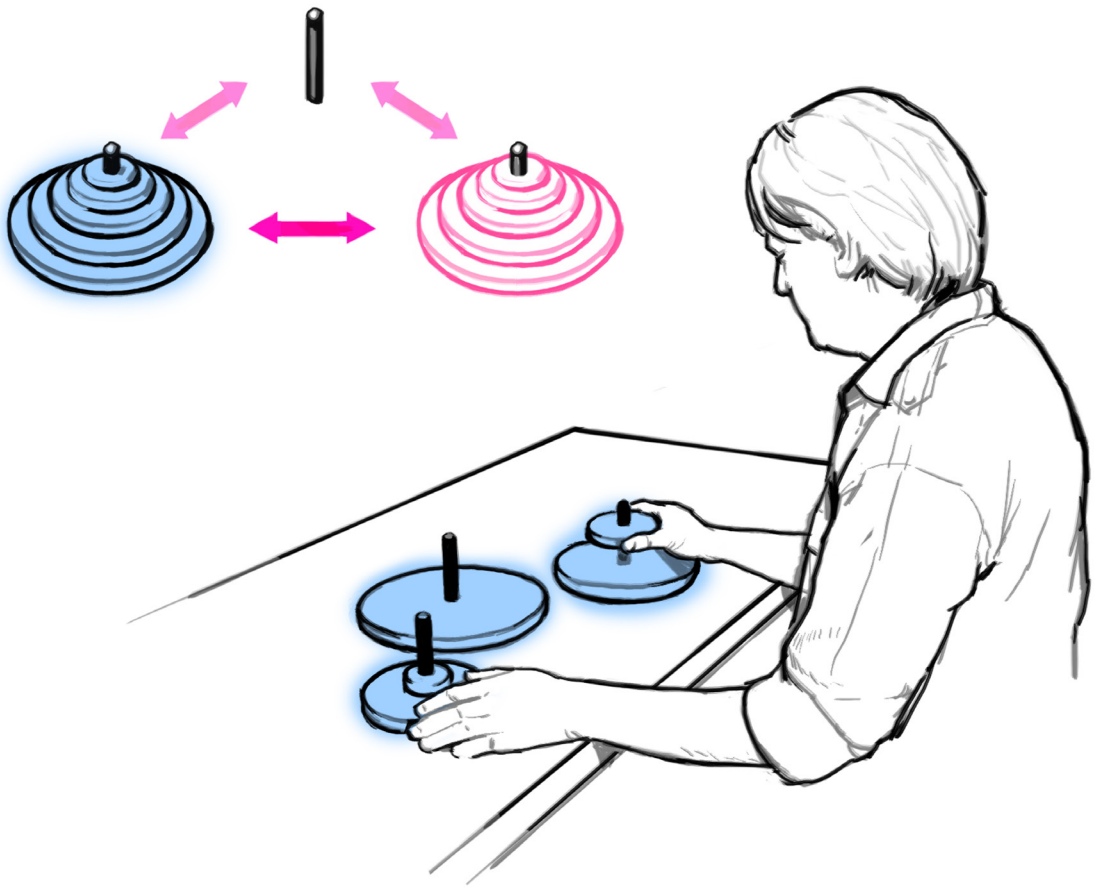
Provided the priests at Benares make no mistakes, they will require 264-1 moves to complete the disc transfers. If they transfer one disc every second, the task will require 585 billion years. The present age of the universe is estimated at about 14 billion years, so we don’t need to worry about an early end to the world!

## To do and notice:

Idea and Concept: Technorama
“Turm von Hanoi_defiZ.indd”; Nr. 10451

# Tours de Hanoï

**Essayez de déplacer tous les disques d'une tour vers l'autre. De combien de coups avez-vous besoin?**



## A vous de jouer:

*Ce jeu a les règles suivantes:*

- *Au début, tous les disques sont sur une des trois tours (rangés selon leur taille, le plus grand en bas).*
- *Vous ne pouvez déplacer qu'un seul disque par coup.*
- *Ne posez jamais un disque sur un plus petit.*
- **Conseil:** *Essayez d'abord avec seulement deux disques, ensuite avec trois.*

**Pour en savoir plus:**

Idée et Conception: Technorama
"Turm von Hanoi_defiZ.indd"; Nr. 10451

# Tours de Hanoï

## Pour en savoir plus

Combien de coups faut-il pour le déplacement? Si l'on essaie avec seulement un, deux, trois disques, on constate vite une relation:

| nombre de discs | nombre de coups |
|---|---|
| 1 | **1** = 2-1 = $2^1$-1 |
| 2 | **3** = 2x2-1 = $2^2$-1 |
| 3 | **7** = 2x2x2-1 = $2^3$-1 |
| 4 | **15** = 2x2x2x2-1 = $2^4$-1 |
| 5 | **31** = 2x2x2x2x2-1 = $2^5$-1 |
| 6 | **63** = 2x2x2x2x2x2-1 = $2^6$-1 |
| n | **...** = 2x2x2x … x2x2-1 = $2^n$-1 |

on peut prouver grâce à l'induction mathématique complète que le problème des tours de Hanoï est soluble. La démonstration met en évidence qu'on peut déplacer n disques en $2^n$-1 coups d'une tour vers l'autre.

### Possibilités de résoudre le problème

Peter Buneman (Universié de Pennsylvanie) et Leon Levy (de AT&T Laboratories) ont inventé en 1984 une suite de coups simples qui permet d'obtenir une solution facile. Il suffit de faire les coups suivants en alternance:

1. **Mettez le disque le plus petit sur la tour suivante dans le sens horaire.**
2. **Déplacez le deuxième disque le plus petit sur la seule tour possible.**

Cette stratégie de solution est très efficace – avec extrêmement peu de règles! L'idée de base de cette solution est de s'imaginer les tours disposées en cercle.

L'histoire suivante a été publiée par le mathématicien français Edouard Lucas (1842-1891) à l'occasion de l'exposition mondiale de 1889 à Paris. Lucas est ainsi l'inventeur des «Tours de Hanoï» (parfois appelées les «Tours de Brahma» ou «le casse-tête de la fin du monde»).

«Dans le grand temple des Bénarès qui désignait le centre du monde, se trouvaient trois colonnes en diamant. Le Seigneur a mis sur l'une d'entre elle 64 disques en or au commencement du temps. Ces disques ont un diamètre de plus en plus petit quand on s'approche du sommet; cette tour est dédiée à Brahma. Les prêtres sont occupés jour et nuit pour reconstruire la tour selon les règles suivantes: On ne peut déplacer plus d'un disque à la fois, on ne peut placer un disque que sur un autre plus grand que lui et on peut utiliser toutes les trois colonnes pour reconstruire la tour.

Quand l'œuvre est achevée, c'est-à-dire que la tour a été déplacée de la première vers la deuxième colonne, les prêtres et la tour deviendront de la poussière et la fin du monde sera venue.»

Même dans le cas le plus favorable, les prêtres de Bénarès devraient accomplir $2^{64}$-1 coups pour déplacer la tour selon les règles. Même si les prêtres pouvaient déplacer un disque en une seconde seulement, le déplacement de la tour entière prendrait presque 585 milliards d'années. Si l'on admet que le début du monde était il y a 14 milliards d'année avec le Big Bang, il ne faut pas se faire de souci pour la fin du monde.

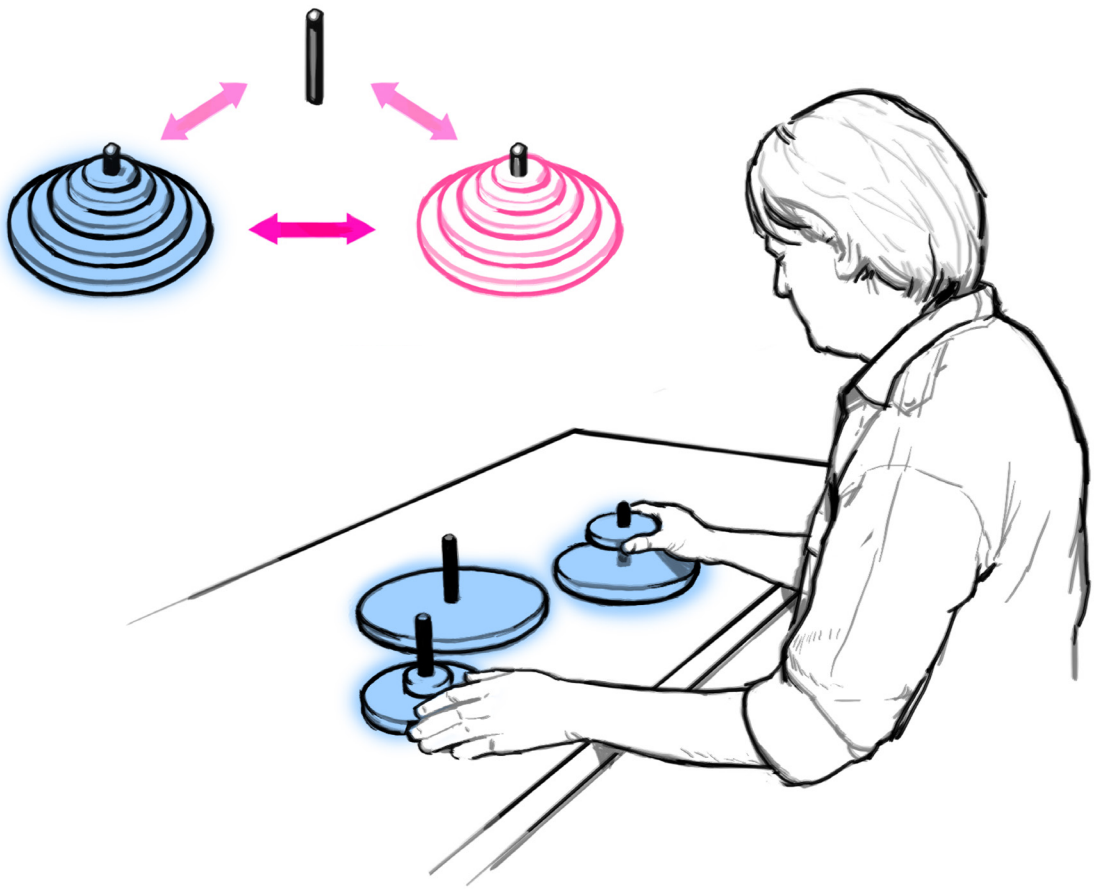
**A vous de jouer:**

Idée et Conception: Technorama
"Turm von Hanoi_defiZ.indd"; Nr. 10451

# Torre di Hanoi

**Provate a spostare tutti i dischi da un piolo all‘altro.**

**Qual è il numero minimo di mosse in cui riuscite a farlo?**



## Che cosa fare:

*In questo gioco occorre rispettare le seguenti regole:*

- *All’inizio tutti i dischi devono essere infilati su uno solo dei tre pioli, quello più grande in basso e poi via via quelli più piccoli.*
- *Si può spostare solo un disco alla volta.*
- *Non è consentito posare un disco più grande sopra uno più piccolo.*
- **Un consiglio:** *Provate prima con due dischi e poi con tre.*

**Vuole saperne di più?**

Ideazione e progetto: Technorama
“Turm von Hanoi_defiZ.indd”; Nr. 10451

# Torre di Hanoi

## Vuole saperne di più?

Quante mosse occorrono per trasferire le pile ordinate? Se si cerca di farlo inizialmente con uno, due o tre dischi, appare ben presto evidente che c'è uno stretto rapporto fra numero di dischi e numero delle mosse:

| Numero dei dischi | Numero delle mosse |
|---|---|
| 1 | **1** = 2-1 = $2^1$-1 |
| 2 | **3** = 2x2-1 = $2^2$-1 |
| 3 | **7** = 2x2x2-1 = $2^3$-1 |
| 4 | **15** = 2x2x2x2-1 = $2^4$-1 |
| 5 | **31** = 2x2x2x2x2-1 = $2^5$-1 |
| 6 | **63** = 2x2x2x2x2x2-1 = $2^6$-1 |
| n | **...** = 2x2x2x … x2x2-1 = $2^n$-1 |

Si può dimostrare induttivamente e con procedimento matematico che il problema della torre di Hanoi è solubile. La dimostrazione infatti prova che è possibile trasferire n dischi da un piolo all'altro in $2^n$ -1 mosse.

**Possibili soluzioni**

Nel 1984 Peter Buneman (Università della Pennsylvania) e Leon Levy (Laboratori AT&T) hanno scoperto una semplice sequenza di mosse con cui si perviene facilmente alla soluzione. È sufficiente eseguire in successione le seguenti mosse:

1. **Posa il più piccolo disco che si possa trasferire sul piolo più vicino in senso orario.**
2. **Trasferisci il secondo disco più piccolo che si possa trasferire sull'unico piolo possibile.**

Questa strategia di soluzione è molto efficiente e consiste di un numero incredibilmente piccolo di istruzioni. L'idea di fondo è quella di immaginare che i pioli sono disposti in cerchio.

Questa storia è stata pubblicata dal matematico francese Edouard Lucas (1842-1891) in occasione dell'esposizione mondiale del 1889 a Parigi. Lucas è l'inventore della Torre di Hanoi (a volte chiamata anche Torre di Brahma o Rompicapo della Fine del Mondo).

«Nel grande tempio di Benares, che indica il centro dell'Universo, sorgono tre colonne di diamante. Su una di esse il Signore ha posato, al principio dei tempi, 64 dischi d'oro che hanno un diametro decrescente dal basso verso l'alto. Questa torre è consacrata a Brahma. Giorno e notte i sacerdoti del tempio sono occupati a ricostruire le torri in base alle seguenti regole:

I dischi possono essere trasferiti solo uno a uno e un disco non può essere mai posato su un disco più piccolo. Per ricostruire la torre si possono utilizzare tutte e tre le colonne. Quando l'opera è compiuta, la torre e i sacerdoti si dissolvono il polvere e la fine del mondo è giunta.»

Perfino nel caso più favorevole possibile, i sacerdoti di Benares dovrebbero eseguire $2^{64}$-1 mosse per trasferire la torre in base alle regole. Anche se i sacerdoti avessero bisogno di appena un secondo, tutta la trasposizione dell'intera Torre durerebbe quasi 585 miliardi di anni. Siccome però si ritiene che l'origine dell'Universo sia avvenuta in seguito al Big Bang meno di 14 miliardi di anni fa, non dobbiamo darci troppi pensieri per un'imminente fine del mondo.

**Che cosa fare:**

Ideazione e progetto: Technorama
"Turm von Hanoi_defiZ.indd"; Nr. 10451