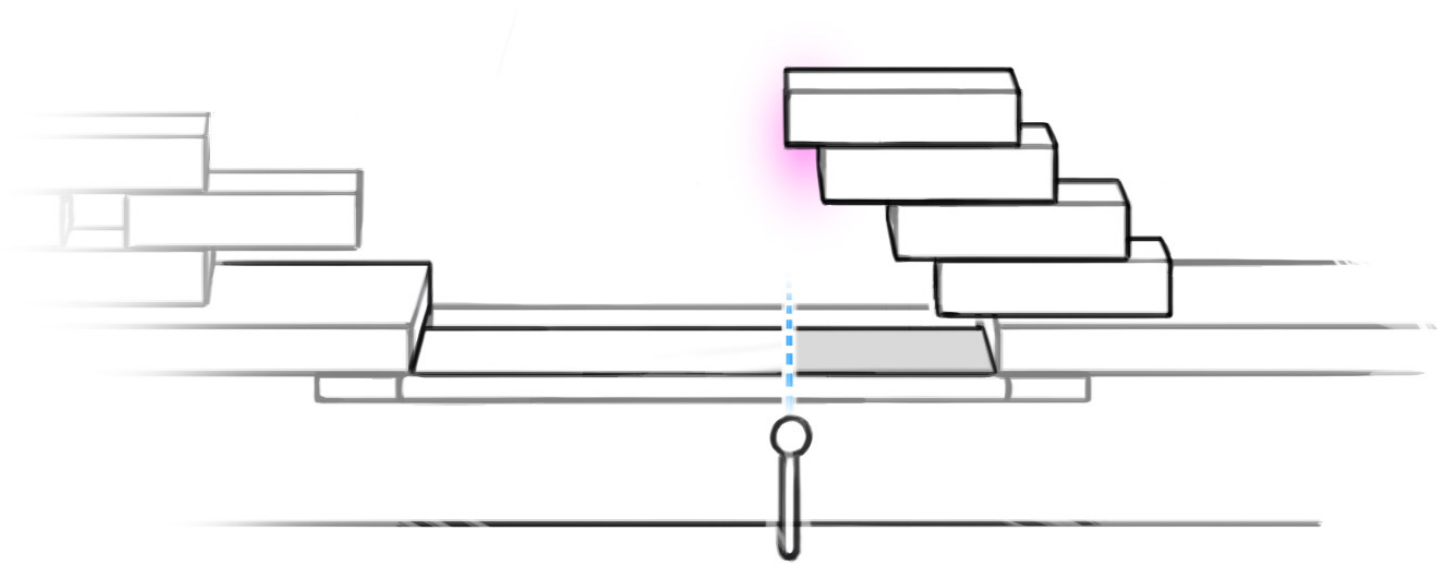
Ausladungen

Wer kommt am weitesten raus?

Die mathematisch elegan-teste Lösung für ein Problem ist nicht immer die beste Lösung.



Was tun und beachten:

- *Mit den neun Klötzen soll eine Brücke über den Abgrund gebaut werden - geht das?*
- *Dazu bietet es sich an, zuerst mit einigen Klötzen auszuprobieren, wie weit man mit welcher Methode über den Abgrund bauen kann.*

Wer mehr wissen möchte:

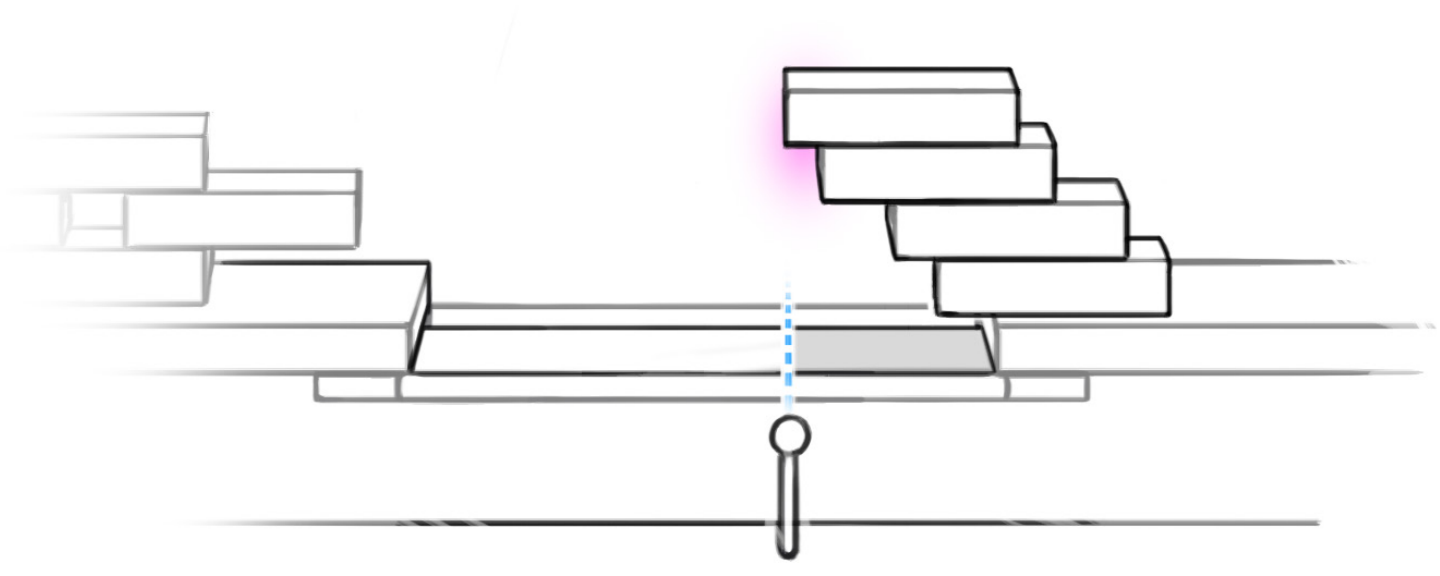
lesen Sie den Zusatztext

Konzept und Ausführung: Technorama
“Ausladungen_DEFI.indd”; Nr. 10032

Ausladungen

Wer kommt am weitesten raus?

Die mathematisch elegan-teste Lösung für ein Problem ist nicht immer die beste Lösung.



Was tun und beachten:

- *Mit den neun Klötzen soll eine Brücke über den Abgrund gebaut werden - geht das?*
- *Dazu bietet es sich an, zuerst mit einigen Klötzen auszuprobieren, wie weit man mit welcher Methode über den Abgrund bauen kann.*

Wer mehr wissen möchte:

Konzept und Ausführung: Technorama
“Ausladungen_DEFI.indd”; Nr. 10032

Ausladungen

Wer kommt am weitesten raus?

Wer mehr wissen möchte

Die übersichtlichste (und klassische) Weise herauszufinden, wie man über den Rand hinaus bauen kann, ist die folgende: Man stapelt zunächst fünf Steine übereinander auf, so dass sie mit ihrer Vorderkante genau an der Kante des Podests anliegen.

Dann schiebt man den obersten Klotz so weit nach vorne, dass er gerade noch hält, also bis zur Hälfte. Dann schiebt man den zweitobersten Klotz so weit, wie es geht, nach vorne, wobei der oberste Klotz mit geschoben wird. Es geht um ein Viertel. Jetzt sind über dem Abgrund und über dem Podest jeweils vier Viertelsteine; also ist das Gebilde im Gleichgewicht – weiter mit dem nächsten Klotz.

Der vierte Klotz befindet sich jetzt schon ganz über dem Abgrund (theoretisch – in der Praxis ist es oft erst der fünfte Klotz).

Diese Methode des Aufbaus (nach der harmonischen Reihe) ist die mathematisch übersichtlichste – aber leider nicht die beste!

Wesentlich effektiver als der Bau gemäss der harmonischen Reihe ist es, konsequent auf ein Gleichgewicht zu setzen (wie der linke Stapel auf dem Textschild). Dafür braucht man zwar immer mindestens zwei Hände, bekommt aber letztlich die Brücke gebaut. Der Aufbau kann auf beiden Seiten des Abgrundes gleichzeitig erfolgen – zum Abschluss wird der neunte Stein in der Mitte aufgesetzt.

Zum Aufbau gemäss der Harmonischen Reihe

Den drittobersten Stein schiebt man um ein Sechstel nach vorne; jetzt befinden sich innen und aussen insgesamt genau neun Sechstelsteine; also ist der Turm im Gleichgewicht.

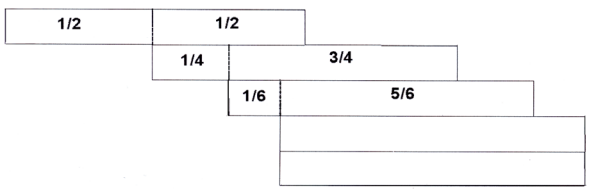
Der vierte Stein wird um ein Achtel, der fünfte um ein Zehntel, allgemein der n-te Stein um 1/2n-tel seiner Länge nach vorne geschoben. Daraus erkennt man folgendes: Wenn man vier Steine nach der Regel verschoben hat, wurde der oberste um

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{12+6+4+3}{12}=\frac{25}{24}$$

nach aussen geschoben; er hängt also bereits vollständig über dem Abgrund. Genauer gesagt befindet er sich 1/24, also etwa 4% vom Podest entfernt.

Der mathematische Schlüssel ist die sogenannte harmonische Reihe 1 + 1/2+ 1/3 + 1/4 +... Diese divergiert, das heisst: sie wird grösser als jede vorgegebene Zahl.

Für das Experiment bedeutet dies, dass man die Klötze beliebig weit nach aussen bauen kann – allerdings wird der Turm dabei ausserordentlich hoch.



Was tun und beachten:

Konzept und Ausführung: Technorama
“Ausladungen_DEFI.indd”; Nr. 10032

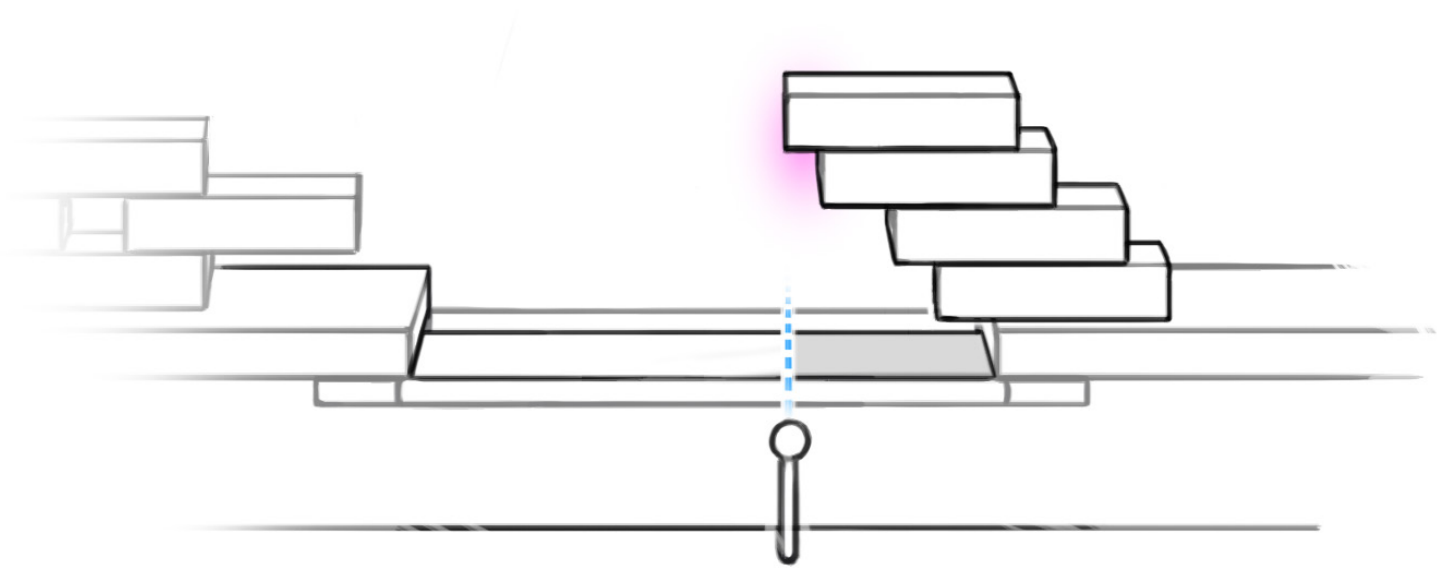
Bridge the Gap

Who can build out the furthest?

The most elegant mathematical solution is not necessarily the best.

To do and notice:

- *You have nine blocks to build a bridge over the gap – can it be done?*
- *It would seem best to try with a few blocks to find the best approach.*



Want to know more?

Concept and Realisation: Technorama
“Ausladungen_DEFI.indd”; Nr. 10032

Bridge the Gap

Who can build out the furthest?

Want to know more?

The most obvious (and classical) way to find out how to build out across the gap is as follows: start with all five blocks on top of each other with all front edges exactly above the edge of the gap.

Next, slide the top block forwards as far as it will go without toppling – that is almost half its length. Then the block below it is slid across as far as it will go, with the top block still in position. This will slide almost a quarter of its length. There are now three quarter-blocks over the gap and three quarter-blocks still behind the edge, so they balance.

Proceeding with the other blocks; by the fourth move the top block will now be completely over the gap – theoretically, that is, but in practice, it is more likely to be the fifth move (sliding the whole stack).

This method of building may be mathematically simple – the slides follow the “harmonic series” (see below) but it is not the best – the bridge would be very unstable. The method of stacking shown on the left of the diagram overleaf is much more effective and stable. You will have to use both hands, but you will end up with a bridge. You can build out on both sides and then fit the ninth block in the middle to complete the job.

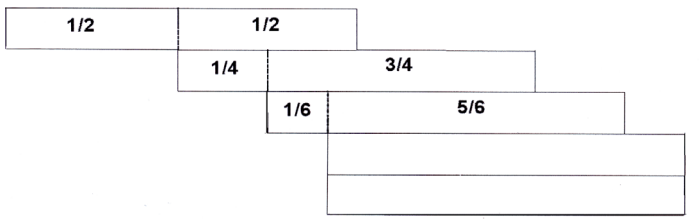
The «harmonic series» stacking theory

Continuing from the first paragraph, the third block from the top can be slid out one sixth of its length, so that there will now be nine sixths of a block length over the gap and the same behind the edge, so the stack is still in equilibrium.

The fourth will slide one eighth, the fifth, one tenth of its length; in general the n-th block will slide 1/2n of its length.

This means that the top block is now overhanging by 1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 = 25/24 of its length – about 4% of its length beyond the edge.

The above sum can be written as: 1/2 (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4), which includes the start of the so-called “harmonic series”, 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + …, which is in fact divergent, i.e. gets bigger without limit! This means that this kind of stack can lean out as far as you want – but it would get impossibly high.



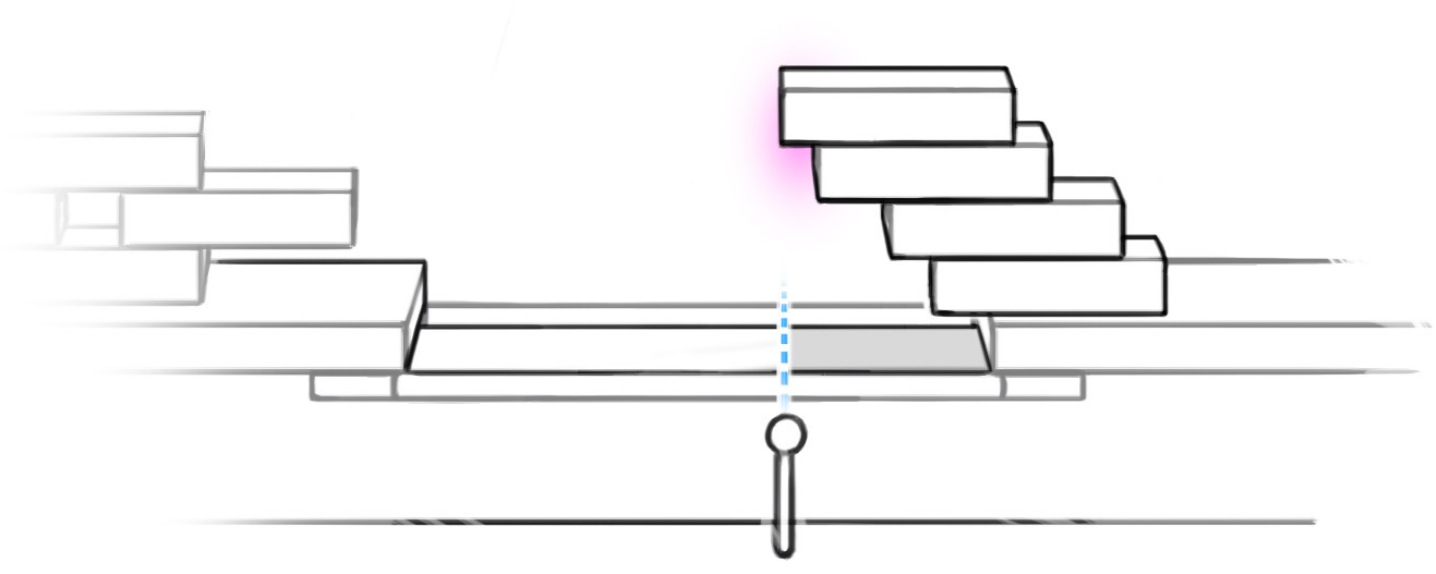
To do and notice:

Concept and Realisation: Technorama
“Ausladungen_DEFI.indd”; Nr. 10032

Parties saillantes

Laquelle dépasse le plus?

La solution mathématique la plus élégante n'est pas toujours la meilleure.



A vous de jouer:

- *A l'aide des neufs blocs il faudra construire un pont qui traverse le vide – est-ce possible?*
- *Il est recommandé de commencer d'abord avec quelques blocs afin de savoir avec quelle méthode on pourrait réussir à construire le pont.*

Pour en savoir plus:

Conception et réalisation: Technorama
"Ausladungen_DEFI.indd"; Nr. 10032

Parties saillantes

Laquelle dépasse le plus?

Pour en savoir plus

Le moyen le plus direct (et le plus classique) pour découvrir comment on peut construire le pont en dépassant le bord, est le suivant: on empile d'abord cinq blocs les uns sur les autres de sorte que leur bord avant touche le bord.

Ensuite on décale le plus possible le bloc le plus haut vers l'avant sans qu'il tombe, c'est-à-dire jusqu'à la moitié. Puis on déplace le deuxième bloc vers l'avant sans le faire tomber, en décalant en même temps le bloc le plus haut; c'est un quart cette fois-ci. Maintenant on a au dessus du vide à chaque fois quatre quart d'un bloc, c'est donc une construction en équilibre. On continue avec le bloc suivant. Le quatrième bloc se trouve maintenant déjà entièrement au dessus du gouffre (théoriquement, dans la pratique c'est souvent seulement le cinquième bloc).

Cette méthode de construction (selon une série harmonique) est celle qui est mathématiquement la plus claire – mais malheureusement elle n'est pas la meilleure!

Il est beaucoup plus efficace de construire le pont en jouant sur l'équilibre (comme illustré au recto à gauche) au lieu de faire une construction avec une série harmonique. Il faut toujours au moins deux mains mais au final, on aboutit au pont. La construction peut se faire des deux côtés du vide en parallèle – à la fin on ajoute la neuvième pierre au milieu.

La construction selon une série harmonique

Le troisième bloc d'en haut est déplacé d'un sixième vers l'avant; maintenant il y a à l'intérieur ainsi qu'à l'extérieur exactement neuf sixième de bloc; donc la tour est en équilibre.

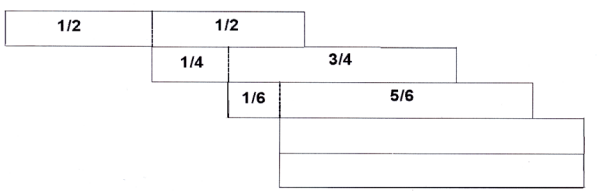
Le quatrième bloc est déplacé d'un huitième, le cinquième d'un dixième, et de manière générale. Le n-ième bloc est décalé d'un 1/2n-ième de son longueur vers l'avant.

On peut en déduire: quand on a déplacé quatre blocs selon cette règle, le bloc le plus haut a été déplacé de

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{12+6+4+3}{12}=\frac{25}{24}$$

Vers l'extérieur; il se trouve donc entièrement au dessus du vide. Pour être plus précis, il s'est éloigné de 1/24, donc de 4% environ, du bord.

La clé mathématique est la série harmonique 1 + 1/2+ 1/3 + 1/4 +...Celle ci diverge, ce qui veut dire: chaque nombre est plus grand que le précédent. Pour l'expérience ça signifie qu'on peut construire les blocs aussi loin vers l'avant qu'on veut – mais ça implique que la tour devient très haute.



A vous de jouer:

Conception et réalisation: Technorama
"Ausladungen_DEFI.indd"; Nr. 10032

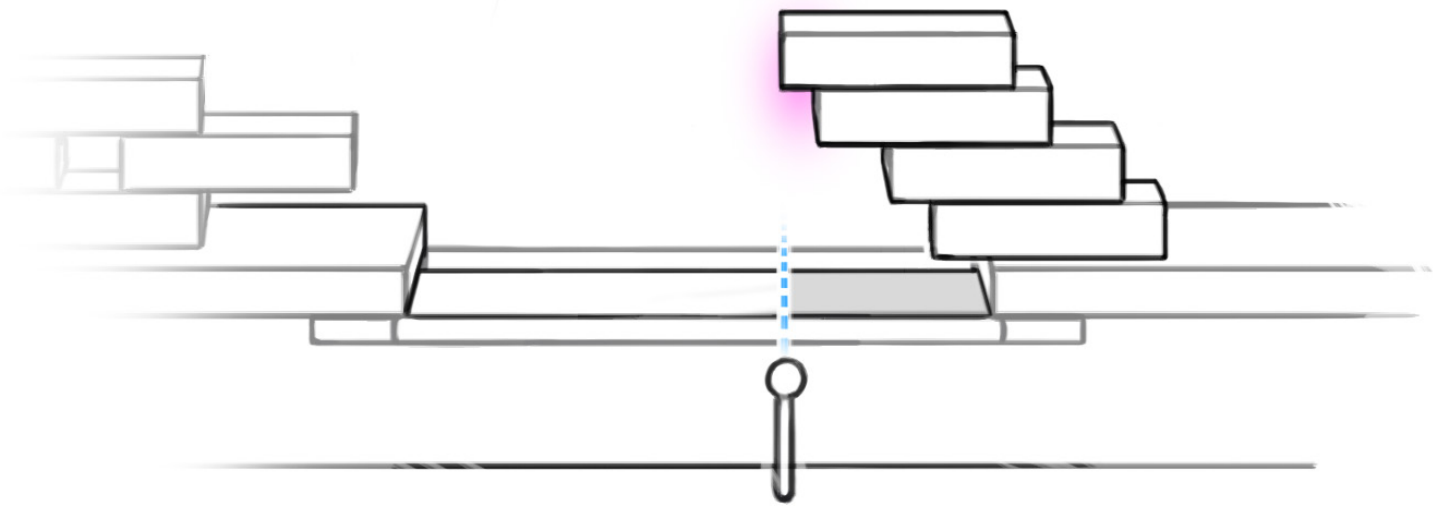
Il problema del ponte

Come realizzare costruzioni spioventi

La più elegante soluzione matematica di questo problema non è sempre la soluzione migliore.

Che cosa fare:

- *Si tratta di costruire un ponte con i nove blocchi di legno: è possibile?*
- *Per farlo bisogna anzitutto scoprire quanto si riesce a far sporgere la costruzione sul vuoto intermedio, sovrapponendo pochi blocchi in diversi modi.*



Vuole saperne di più?

Ideazione e realizzazione: Technorama
“Ausladungen_DEFI.indd”; Nr. 10032

Il problema del ponte

Come realizzare costruzioni spioventi

Vuole saperne di più?

Il modo più semplice (e classico) di scoprire come si fa a costruire oltre il bordo di qualcosa è il seguente: anzitutto si sovrappongono cinque blocchi uno sopra l'altro, in modo che lo spigolo anteriore sia perfettamente allineato al bordo della base.

Poi si sposta il blocco più alto in modo da farlo sporgere finché rimane in equilibrio, cioè fino a metà. Successivamente si sposta il secondo blocco in modo da farlo sporgere e rimanere in equilibrio, Poi si fa la stessa cosa con il terzo e con il quarto. Così alla fine ci sono quattro blocchi sporgenti sul vuoto, ciascuno per la misura di un quarto di blocco.

A questo punto in teoria l'aggetto (la sporgenza) sopra il vuoto dovrebbe essere pari alla lunghezza di un blocco (in pratica spesso occorre spostare cinque blocchi per ottenere questo risultato.

Questo sistema di costruzione (basato sulla serie armonica) è quello più lineare matematicamente ma purtroppo non è il migliore.

La costruzione risulta sostanzialmente più efficiente se si adotta lo stratagemma di costruire dei contrappesi (come la pila di sinistra sul cartello). Per farlo, però, bisogna avere almeno due mani libere, ma alla fine si riesce a costruire il ponte. La costruzione può essere eseguita dai due lati simultaneamente e alla fine il nono blocco verrà collocato al centro del ponte.

Come costruire secondo la serie armonica

Il terzo blocco dall'alto viene spostato di un sesto in avanti. Ora ci sono esattamente nove blocchi che sono spostati all'interno e all'esterno di un sesto. Pertanto la torre rimane in equilibrio.

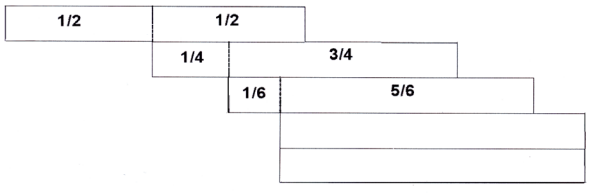
Il quarto blocco viene spostato di un ottavo, il quinto di un decimo e in generale l'n-esimo blocco viene spostato in avanti nella misura di 1/2•n della sua lunghezza.

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{12+6+4+3}{12}=\frac{25}{24}$$

Da questo si ricava quanto segue: se si sono spostati quattro blocchi in base a questa regola, quello più in alto viene spostato verso l'esterno. Dunque sporge sul vuoto per tutta la sua lunghezza. Più esattamente esso si trova distante di 1/24 cioè di circa il 4% dal bordo della base.

La chiave matematica è la cosiddetta serie armonica: 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4+ ... È una serie divergente, il che significa che diventa più grande di qualsiasi numero dato.

Questo, ai fini del nostro esperimento, significa che i blocchi possono essere fatti sporgere a piacere, ma la torre diventerà straordinariamente alta.



Che cosa fare:

Ideazione e realizzazione: Technorama
"Ausladungen_DEFI.indd"; Nr. 10032